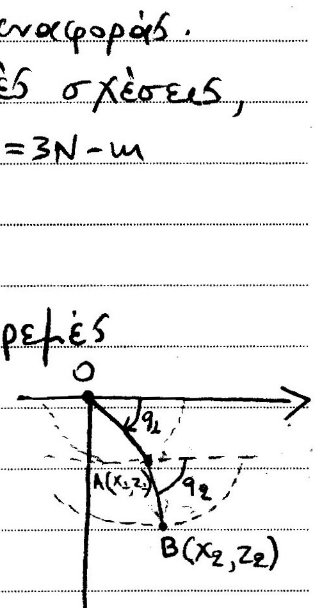
Εξισώσεις Lagrange 2ου είδους

Ορισμός

Με τη μέθοδο Lagrange μπορούμε να διατυπώσουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος ως προς οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, μη-καρτεσιανό, αδρανειακό, κινούμενο) με τέτοιο τρόπο ώστε οι εξισώσεις αυτές να εμφανίζονται μόνο στα τόσα μεγέθη, όσα αρκούν για τον καθορισμό της θέσης του συστήματος. Τα μεγέθη αυτά (πχ. γωνία του εκκρεμούς), ονομάζονται γενικευμένες συντεταγμένες.
Έστω Μηχανικό σύστημα με $x_1, \dots, x_{3N}$ καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
Αν οι συντεταγμένες συνδέονται με m δεσμικές σχέσεις, ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος είναι $\nu = 3N - m$

Παρ

Για την κίνηση που κάνει διπλό επίπεδο εκκρεμές του σχήματος που αποτελείται ~~από~~ δύο σωμάτια $A(m_1)$ και $B(\cancel{m_2})$ και δύο αβαρείς ράβδοι OA και AB που στρέφονται χωρίς τριβή περί των σημείων O και A.



Οι συντεταγμένες των σωματίων είναι x_1, z_1, x_2, z_2

Δεσμικές σχέσεις: $x_1^2 + z_1^2 = l_1^2$

$$(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_2^2$$

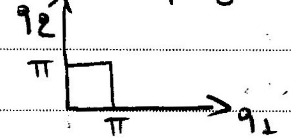
Αν εκφράσουμε τις συντεταγμένες x, z ως συναρτήσεις των γωνιών q_1 και q_2 με τις σχέσεις: $x_1 = l_1 \cos q_1$, $x_2 = x_1 + l_2 \cos q_2$

$$z_1 = l_1 \sin q_1, \quad z_2 = z_1 + l_2 \sin q_2$$

Άρα η θέση καθορίζεται με ακρίβεια από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_1, q_2 οι οποίες είναι ισάριθμες με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος.

Ορισμός

Μορφικός χώρος ή χώρος θέσεων καλείται ο ν-διάστατος χώρος που έχει καρτεσιανές συντεταγμένες τις $q_1, \dots, q_\nu$. π.χ. στο διπλό εκκρεμές ο μορφικός χώρος θα περιορίζεται στο τετράγωνο με πλευρές αυτές των επιπέδων



Αρχή Δυνατών Έργων

$W = \sum_{i=1}^{N} F_i \delta r_i$ όπου $F_i \equiv$ δεδομένες δυνάμεις και

$\delta r_i \equiv$ δυνατή μετατόπιση

D'Alembert

$$\sum_{i=1}^{N} (F_i - m\ddot{r}_i) = 0$$

$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$ (Κινητική Ενέργεια

$F_i = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} i + \frac{\partial V}{\partial y_i} j + \frac{\partial V}{\partial z_i} k \right)$ όπου $V = V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)$ το δυναμικό των δεδομένων δυνάμεων

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$: Εξίσωση Lagrange

$L = T - V$ συνάρτηση Lagrange

$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$

Πχ

Έστω σύστημα N υλικών σημείων που κινούνται στο χώρο χωρίς δεσμούς. Αν x_i, y_i, z_i είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ως προς αδρανειακό σύστημα και θεωρήσουμε αυτές ως γενικευμένες συντεταγμένες, η συνάρτηση του Lagrange παίρνει την μορφή λόγω $L = T - V$

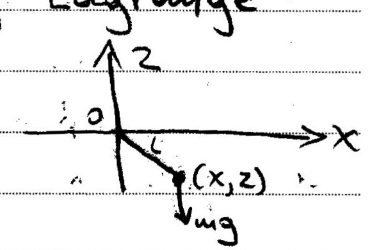
$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - V(x_1, \dots, z_n)$$

Οι εξισώσεις του Lagrange είναι 3N το πλήθος

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_j} = 0$$

Άσκηση

Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση του απλού μαθηματικού εκκρεμούς από την συνάρτηση Lagrange με γενικευμένη τη γωνία φ.



Λύση

Οι συντεταγμένες x, z πληρούν τη δεσμική σχέση $x^2+z^2=l^2$.

Η θέση του συστήματος περιγράφεται από τη γωνία φ που είναι η γενικευμένη συντεταγμένη.

$$\left.\begin{aligned} x &= l\sin\varphi \\ z &= -l\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} &= l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{aligned}$$

$V = mgz = -mgl\cos\varphi$

$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)$

Άρα $L = T - V = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) + mgl\cos\varphi =$

$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}$

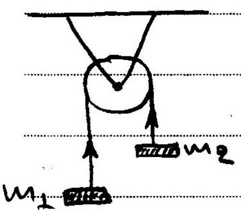
$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$

Συνεπώς, η εξίσωση Lagrange είναι: $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0\right]$$

Ουσιαστικά $q_j = q_1 = \varphi$

Άσκηση



Η μηχανή του Atwood αποτελείται από δύο σωμάτια m_1, m_2 συνδεδεμένα με αβαρές νήμα σταθερού μήκους που κινείται χωρίς τριβές γύρω από μία αβαρή τροχαλία υπό την επίδραση της βαρύτητας. Να βρεθεί η κίνηση της μηχανής του Atwood.

m_1: μετατοπίζεται κατά x και m_2: κατά $l-x$
Η γενικευμένη μεταβλητή: x

Λύση

Αν ονομάσουμε z_1 και z_2 μετατοπίσεις των δύο σωματίων από την αρχική στάθμη θα είναι $z_1=-z_2$

Στο m_1 ασκούνται οι δυνάμεις $m_1 g$ (προς τα κάτω) και το T: τάση του νήματος (προς τα πάνω)

Η δυναμική ενέργεια είναι $V=-m_1 g x - m_2 g(l-x)$

Η κινητική: $T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2$

$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_1 g x+m_2 g(l-x)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=m_1 g-m_2 g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}$$

Lagrange 2ου είδους: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((m_1+m_2)\dot{x}\right)-m_1 g+m_2 g=0 \Leftrightarrow$$

$$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_1 g+m_2 g=0 \Rightarrow \ddot{x}=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}$$

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΠΙΤ

Ένα βαρύ σωμάτιο m αποτελεί εκκρεμές μήκους a, του οποίου το σημείο εξάρτησης A κινείται επάνω στον άξονα Ox, σύμφωνα με τον γνωστό νόμο $X_A=f(t)$

Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης.

Υπόδειξη: $x=f(t)+a\sin\varphi$
$z=-a\cos\varphi$